

# Notes techniques

## 1. 2D vs. 3D

L'intensité d'une source omnidirectionnelle 2D diminue en  $1/R$ , et non en  $1/R^2 \rightarrow$  ce n'est pas une source 3D-isotrope, mais plutôt une source focalisée dans la direction  $z$  (comme un phare-fente) ou un barre lumineuse infinie dans la direction  $z$ .

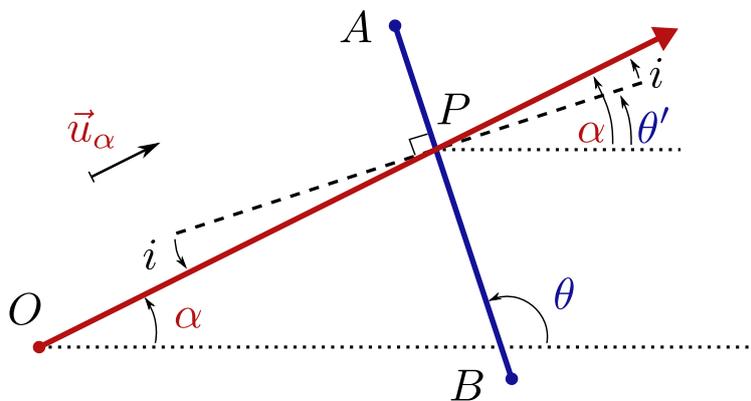
Conjecture : les résultats de la simulation sont les mêmes que en 3D avec des objets infinis suivant  $z$ .

## 2. Angles modulo $2\pi$

De façon générale, on ne ramène jamais systématiquement les angles « géométriques » à  $[0, 2\pi[$  ou  $[-\pi, +\pi[$ , car cela casse les potentielles relations d'ordres entre les angles (e.g.  $-0.1\pi \leq \theta \leq +0.1\pi$  n'est pas équivalent à  $1.9\pi \leq \theta \leq 0.1\pi$ , qui n'est jamais vrai). Exceptions :

- angles d'incidences :  $i \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$  systématiquement
- angle du rayon, ramené à  $[0, 2\pi[$  à chaque émission, pour éviter d'accumuler des tours

## 3. Intersection segment / demi-droite



Segment d'extrémités  $A$  et  $B$  :  $A s + (1 - s) B$  pour  $s \in [0, 1]$ .

Demi-droite portée par  $\vec{u}_\alpha$  d'origine  $O$  :  $O + t \vec{u}_\alpha$  pour  $t \in [0, \infty[$ .

Intersection :

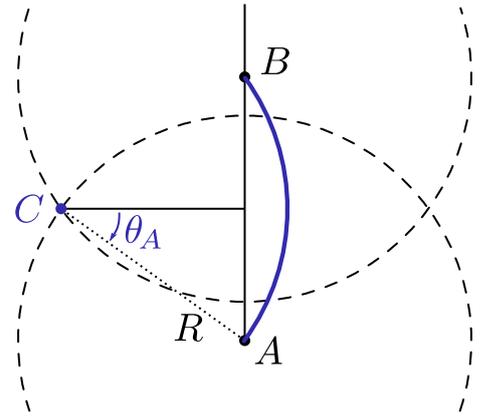
$$\exists s_i, t_i : A s_i + (1 - s_i) B = O + t_i \vec{u}_\alpha \Leftrightarrow \vec{BA} s_i + t_i \vec{u}_\alpha = \vec{BO}$$

$$\Leftrightarrow \exists s_i \in [0, 1], t_i \in [0, \infty[ : \begin{bmatrix} x_a - x_b & -x_\alpha \\ y_a - y_b & -y_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_i \\ t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_o - x_b \\ y_o - y_b \end{bmatrix}$$

En ignorant le cas où le segment et la demi-droite sont parallèles, il suffit de résoudre ce système linéaire. Si  $s \notin [0, 1]$  ou si  $t < 0$ , alors il n'y a pas intersection. Sinon, le point d'intersection est  $P = O + t_i \vec{u}_\alpha$ , et l'angle d'incidence est  $i = \alpha - \theta'$ , où  $\theta = \angle \vec{BA}$  et  $\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$ . L'angle de la normale est  $\theta_{\text{normale}} = \theta' + \pi$ .

#### 4. Construction d'un arc de cercle à partir de $(A, B, R)$

Après translation de  $-\vec{a}$  et rotation d'un angle  $-\theta_0$ , on suppose que  $A$  est l'origine et que  $B$  est à la verticale de  $A$  ( $x'_B = 0$ ). Le centre  $C$  de l'arc de cercle voulu est l'intersection (de droite ici) des deux cercles centrés en  $A$  et  $B$  de rayons  $R$ . On voit immédiatement que  $y'_C = AB/2$ . Le centre  $C$  est finalement défini par la solution négative de  $x'^2_C + y'^2_C = R^2$ , c'est-à-dire



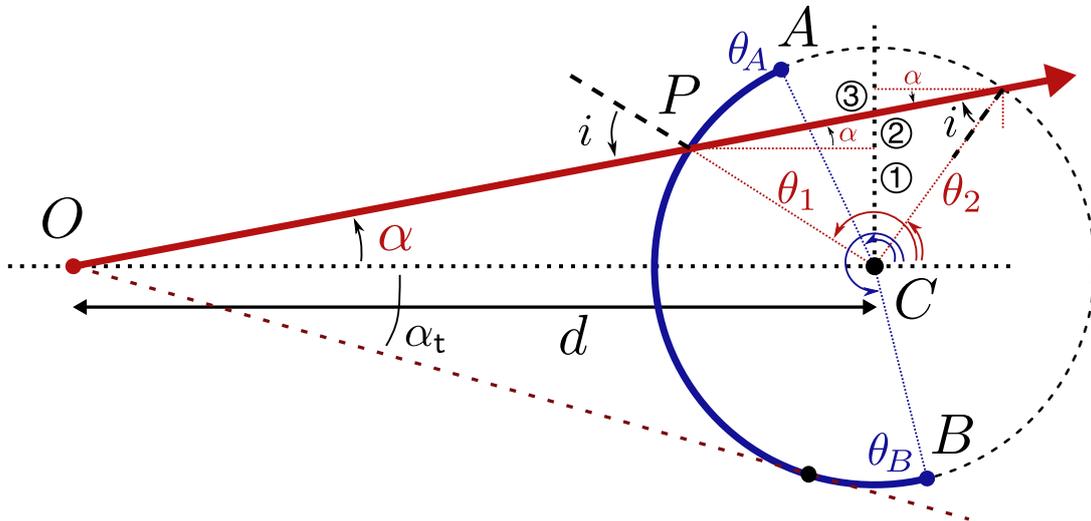
$$x'_C = -\sqrt{R^2 - y'^2_C} = -\sqrt{R^2 - (AB/2)^2} \quad \text{définie si } AB \leq 2R$$

Pour obtenir  $\theta'_A$  et  $\theta'_B$ , on a simplement

$$\tan(\mp\theta'_{A,B}) = \frac{y'_C}{-x'_C} = 1 / \sqrt{(2R/AB)^2 - 1}$$

On obtient finalement  $\theta_{A,B} = \theta'_{A,B} + \theta_0$  et  $C$  après rotation d'un angle  $+\theta_0$  puis une translation de  $+\vec{a}$ .

#### 5. Intersection arc de cercle / demi-droite



On suppose que  $\theta_A < \theta_B$ . La distance  $d = OC$  est non signée ici, et les angles ne sont pas absolus comme avec le segment, mais relatifs à l'axe  $\vec{OC}$  (on peut regarder la figure dans n'importe quel sens). L'arc est de rayon de courbure  $R = CA = CB$ . Clairement, si  $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$  et  $d > R$ , il n'y a pas intersection.

Pour le premier point d'intersection avec le disque ( $P$  ici),

$$d \underbrace{\tan \alpha}_{\textcircled{1}+\textcircled{2}} = \underbrace{(+R \sin \theta_1)}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\tan \alpha \cdot (-R \cos \theta_1)}_{\textcircled{2}} \iff b \cdot \sin(\alpha) = \sin(\theta_1 - \alpha) \quad \text{où } b = \frac{d}{R}$$

La demi-droite intersecte l'arc  $\widehat{AB}$  si  $\theta_1$  est défini, donc si<sup>1</sup>

1. On a alors  $|\sin(\theta_t - \alpha_t)| = 1$ , d'où  $\theta_t = \alpha_t \pm \frac{\pi}{2}$ , d'où

$$\cos \theta_t = \cos(\alpha_t \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin(\alpha_t) = \mp \frac{R}{d}$$

On peut retrouver cet angle  $\theta_t$  en écrivant la condition de tangentialité rayon/cercle au point  $P$  :

$$\begin{bmatrix} R \cos \theta_t \\ \pm R \sin \theta_t \end{bmatrix} = O + t \vec{n}_{\theta_t}^\perp = \begin{bmatrix} -d \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \sin \theta_t \\ \mp \cos \theta_t \end{bmatrix}$$

Pour  $y$ , on a  $R \sin \theta_t = -t \cos \theta_t$  donc  $t = -R \sin \theta_t / \cos \theta_t$ . Alors, pour  $x$ , on a

$$R \cos \theta_t = -d + \left(-R \frac{\sin \theta_t}{\cos \theta_t}\right) \sin \theta_t \iff R \cos^2 \theta_t = -d \cos \theta_t - R \sin^2 \theta_t \iff \cos \theta_t = -\frac{R}{d} (\cos^2 + \sin^2) = -\frac{R}{d}$$

$$b |\sin(\alpha)| \leq 1 \iff |\alpha| < \alpha_t = \arcsin(R/d)$$

lorsque  $d > R$ . Pour  $d < R$  ( $O$  à l'intérieur du cercle), il y a toujours une solution, évidemment.

Pour le deuxième point d'intersection avec le disque, on a

$$d \tan \alpha = \underbrace{(+R \sin \theta_2)}_{\textcircled{1}+\textcircled{2}} - \underbrace{\tan \alpha \cdot (+R \cos \theta_2)}_{\textcircled{3}}$$

... ce qui revient au même :  $b \cdot \sin(\alpha) = \sin(\theta_2 - \alpha)$ .

Cette équation possède en effet, dans  $\theta \in [0, 2\pi[$ , nos deux solutions (courbes  $\theta(\alpha)$  bi-valuées).

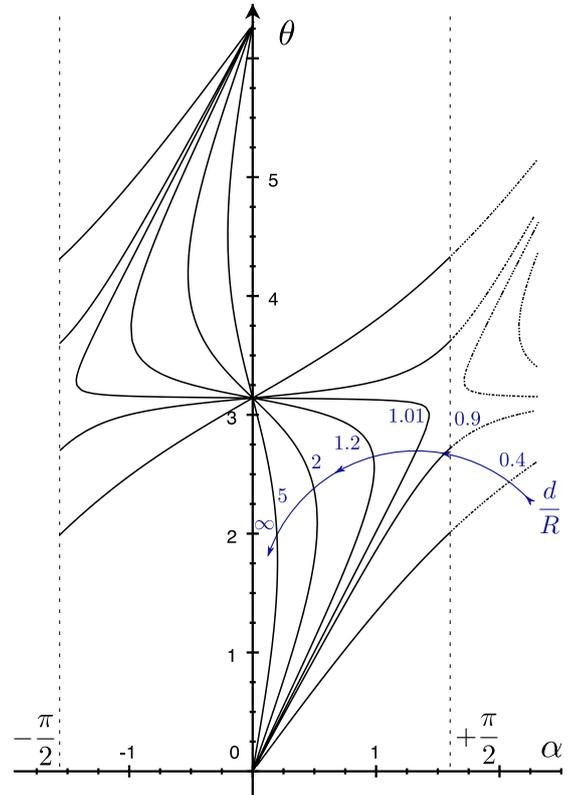
Au final, les solutions sont

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\arcsin(b \cdot \sin(\alpha)) + \alpha + \pi \\ \theta_2 &= +\arcsin(b \cdot \sin(\alpha)) + \alpha \end{aligned}$$

Pour  $d > R$ , la solution correcte est  $\theta_1$  si  $\theta_A < \theta_1 < \theta_B$ , et sinon, éventuellement  $\theta_2$  si  $\theta_A < \theta_2 < \theta_B$ . Pour  $d < R$ , la seule solution correcte est  $\theta_2$  (et si on veut rester dans  $[0, 2\pi[$ , on ajoute  $2\pi$  à  $\theta_2$  pour  $\alpha < 0$ ).

Les angles d'incidence respectifs sont

$$i_1 = (\pi - \theta_1) + \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} = \alpha + (-i_2) + \left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) \iff i_2 = \alpha - \theta_2$$



## 6. Réflexion et réfraction sur une interface $n_1 \rightarrow n_2$

Réflexion :

$$\text{toujours, avec un angle } i_r = i \implies \alpha_r = \theta_{\text{normale}} - i$$

Réfraction (transmission) :

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(i_t) \quad \begin{array}{l} \text{toujours lorsque } n_1 \leq n_2 \\ \text{pour } i \leq i_{cr} = \arcsin(1/\gamma) \text{ lorsque } n_1 > n_2 \end{array} \quad \text{avec } \gamma := \frac{n_1}{n_2}$$

$$\implies \alpha_t = \theta_{\text{anti-normale}} + i_t = (\theta_{\text{normale}} + \pi) + \arcsin(\gamma \cdot \sin(i))$$

Coefficients de réflexion en puissance (c'est juste  $R = |\rho|^2$ ) :

$$R_{TE} = \left| \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos i_t}{n_1 \cos i + n_2 \cos i_t} \right|^2 \quad \text{et} \quad R_{TM} = \left| \frac{n_2 \cos i - n_1 \cos i_t}{n_2 \cos i + n_1 \cos i_t} \right|^2$$

développés<sup>2</sup> :

$$R_{TE, TM} = \begin{cases} \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 & \text{si } i \leq i_{cr} \\ 1 \quad (\text{refl. int. tot.}) & \text{si } i > i_{cr} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a_{TE} = \gamma \cos i \\ a_{TM} = \gamma^{-1} \cos i \end{array} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 i}$$

Réflexion nulle ( $a = b$ ) si :

$$\bullet \quad R_{TE} = 0 \iff \cos^2 i + \sin^2 i = 1 = \gamma^2 \iff n_1 = n_2$$

Et puisque  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$  est indépendant du signe de  $x$ , on peut tout aussi bien prendre  $\cos \theta_t = +R/d$ .

$$2. \quad i_t = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(i)\right) \implies \cos(i_t) = \begin{cases} \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 i} & \text{si } i \leq i_{cr} \\ i\sqrt{\gamma^2 \sin^2 i - 1} & \text{si } i > i_{cr} \end{cases} \quad \text{avec } x = \frac{n_1}{n_2} \sin(i)$$

- $R_{\text{TM}} = 0 \iff \cos^2 i + \gamma^4 \sin^2 i = \gamma^2 \iff n_1 = n_2 \text{ ou } i = i_{\text{Brewster}} = \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$   
 car  $R_{\text{TM}} = 0 \iff \cos^2 + \gamma^4 \sin^2 = \gamma^2 = \gamma^2 \cos^2 + \gamma^2 \sin^2$   
 $\iff (1 - \gamma^2) \cos^2 = \gamma^2 (1 - \gamma^2) \sin^2$   
 $\iff \gamma = 1 \text{ ou } \tan^2 = \gamma^{-2}$

Coefficients de transmission en puissance (ce n'est pas<sup>3</sup> juste  $T = |\tau|^2$ ) :

$$T = 1 - R$$

par conservation de l'énergie. Ici, l'histoire d'angle de vue de l'interface ne rentre pas en compte, puisqu'on a seulement des rayons  $\rightarrow$  l'intégration spatiale est déjà faite, et on manipule des puissances, pas des intensités. Cela est cohérent avec le fait d'oublier la formule de l'éclairement  $\mathcal{E} = I \cos \theta$ .

## 7. Objets diffusants : BRDF

[https://en.wikipedia.org/wiki/Bidirectional\\_reflectance\\_distribution\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Bidirectional_reflectance_distribution_function)

Propriété d'une BRDF « 2D »  $f(i, i_r)$  :

- réciprocity :  $f(i, i_r) = f(i_r, i)$  (crucial pour avoir l'équivalence 2D  $\leftrightarrow$  3D  $z$ -invar. : les rayons « perdus » hors du plan sont compensés par tous rayons « hors plan » (venant des points  $z \neq 0$  des sources) réfléchis dans le plan)
- positivité :  $f(i, i_r) > 0$
- conservation de l'énergie :  $\forall i, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} di_r f(i, i_r) = 2\pi$  (les absorptions sont réglés avec la variable d'albédo dédiée)

### 3. Coefficients de réflexion en amplitude :

$$\rho_{\text{TE}} = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos i_t}{n_1 \cos i + n_2 \cos i_t} \quad \text{et} \quad \rho_{\text{TM}} = \frac{n_2 \cos i - n_1 \cos i_t}{n_2 \cos i + n_1 \cos i_t}$$

développés :

$$\rho_{\text{TE, TM}} = \begin{cases} \frac{a-b}{a+b} & \text{si } i \leq i_{\text{cr}} \\ \frac{a-ib}{a+ib} \text{ (de norme 1)} & \text{si } i > i_{\text{cr}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_{\text{TE}} = \gamma \cos i \\ a_{\text{TM}} = \gamma^{-1} \cos i \end{cases} \quad \text{et} \quad b = \sqrt{|1 - \gamma^2 \sin^2 i|}$$

Coefficients de transmission en amplitude :

$$\tau_{\text{TE}} = \frac{2 n_1 \cos i}{n_1 \cos i + n_2 \cos i_t} \quad \text{et} \quad \tau_{\text{TM}} = \frac{2 n_1 \cos i}{n_2 \cos i + n_1 \cos i_t}$$

développés :

$$\tau_{\text{TE, TM}} = \begin{cases} \frac{c}{a+b} & \text{si } i \leq i_{\text{cr}} \\ \frac{c}{a+ib} \text{ (ampl. plasmon)} & \text{si } i > i_{\text{cr}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_{\text{TE}} = 2 \gamma \cos i \\ c_{\text{TM}} = 2 \cos i \end{cases} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{n_2 \cos i_t}{n_1 \cos i} |\tau|^2$$